中文名称：球面上的g-猜想

英文名称：The g-Conjecture for Spheres

撰写人：陈永川，Richard P. Stanley

球面上的g-猜想是关于一个$(d-1)$-维球面的三角剖分其i-维面的可能个数的完全刻画，其中 $0 \le i \le d-1$. 一个抽象的单纯复形Δ 被称为一个$(d-1)$-维球面$\mathbb{S}^{d-1}$ 的三角剖分如果它的几何实现（同拓扑学中定义）和$\mathbb{S}^{d-1}$ 同胚。令f_i 表示Δ 的i-维面的个数，其中 $0 \le i \le d-1$, 且$f_{-1}=1$. 定义Δ 的*h-向量* $h(\Delta)=(h_0,h_1,\ldots,h_d)$ 为

$$\sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i}.$$

对于$\mathbb{S}^{d-1}$ 的任意一个三角剖分，则*Dehn-Sommerville 方程* $h_i = h_{d-i}$ 成立。定义Δ 的*g-向量* $g(\Delta)=\left(g_0,g_1,\ldots,g_{\lfloor d/2\rfloor}\right)$ 为

$$g_0=1, \quad g_i = h_i - h_{i-1},\ 1 \le i \le \lfloor d/2 \rfloor.$$

定义一个*多重复形（multicomplex）* 为一个由非负整数向量$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$（对某个n）构成的集合Γ, 使得若$(a_1,\ldots,a_n)\in\Gamma$ 且 $0\le b_i\le a_i$, 则有$(b_1,\ldots,b_n)\in\Gamma$. 向量$(a_1,\ldots,a_n)$ 的*度（degree）*定义为$\sum a_i$.

球面上的g-猜想.一个向量$\left(g_0,g_1,\ldots,g_{\lfloor d/2\rfloor}\right)$ 是$\mathbb{S}^{d-1}$ 的一个三角剖分的g-向量当且仅当存在一个多重复形Γ, 使得Γ恰含有g_i个度为i的向量，其中$0\le i\le\lfloor d/2\rfloor$.

在g-猜想中有一个关于向量$(g_0,g_1,\ldots,g_{\lfloor d/2\rfloor})$ 的较复杂的数值刻画，可参见Stanley [5]. 一类特殊且重要的球面三角剖分是*单纯多面体（simplicial polytope）*。它们是真面（proper face）为单形（从而它们的边界是一个三角剖分球面的几何实现）的凸多面体（convex polytope）。当$d\ge 4$ 时，已经知道存在非多面体（即并非来自于单纯多面体）的$\mathbb{S}^{d-1}$ 的三角剖分。

McMullen [3] 首先明确地表述了单纯多面体上的g-猜想，由于几乎没有什么证据，这可谓是一个大胆的猜想。他意识到这个猜想有可能在球面上也成立，但却不愿正式提出这个更一般的猜想。Stanley [4]首先正式提出了球面上的g-猜想，他甚至认为g-猜想还可以推广到比球面更一般的对象上，于是提出了一个更一般的被称为Gorenstein* 复形上的g-猜想的猜想。单纯多面体上的g-猜想的充分性被Billera和Lee [2]所证明，必要性被Stanley [4]所证明。可以证明，若充分性在单纯多面体上成立，则在球面上也成立，因此仅剩下必要性未被证明。单纯多面体上的必要性证明使用了深刻的代

数几何中的工具；后来McMullen给出了一个更为初等的证明，但仍然是非常代数化的证明。

f-向量理论仍是代数组合的一个非常活跃的研究领域。进一步的参考文献参见[1]和[5].

参考文献

[1] M.M. Bayer and C.W. Lee, Combinatorial aspects of convex polytopes, In: Handbook of Convex Geometry, Vol. A, North-Holland, Amsterdam, 1993, pp. 485–534.

[2] L.J. Billera and C.W. Lee, Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes, Bull. Amer. Math. Soc. 2 (1980), 181–185.

[3] P. McMullen, The numbers of faces of simplicial polytopes, Israel J. Math. 9 (1971), 559–570.

[4] R.P. Stanley, The number of faces of a simplicial convex polytope, Adv. Math. 35 (1980), 236–238.

[5] R.P. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra, 2nd Ed., Progress in Mathematics, Vol. 41, Birkhäuser, Boston, 1996.