

中文名称：球面上的 g -猜想

英文名称：The g -Conjecture for Spheres

撰写人：陈永川, Richard P. Stanley

球面上的 g -猜想是关于一个 $(d-1)$ -维球面的三角剖分其 i -维面的可能个数的完全刻画, 其中 $0 \leq i \leq d-1$. 一个抽象的单纯复形 Δ 被称为一个 $(d-1)$ -维球面 \mathbb{S}^{d-1} 的三角剖分如果它的几何实现 (同拓扑学中定义) 和 \mathbb{S}^{d-1} 同胚. 令 f_i 表示 Δ 的 i -维面的个数, 其中 $0 \leq i \leq d-1$, 且 $f_{-1} = 1$. 定义 Δ 的 h -向量 $h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ 为

$$\sum_{i=0}^d h_i x^{d-i} = \sum_{i=0}^d f_{i-1} (x-1)^{d-i}.$$

对于 \mathbb{S}^{d-1} 的任意一个三角剖分, 则 $Dehn-Sommerville$ 方程 $h_i = h_{d-i}$ 成立. 定义 Δ 的 g -向量 $g(\Delta) = (g_0, g_1, \dots, g_{\lfloor d/2 \rfloor})$ 为

$$g_0 = 1, \quad g_i = h_i - h_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor.$$

定义一个多重复形 (*multicomplex*) 为一个由非负整数向量 (a_1, a_2, \dots, a_n) (对某个 n) 构成的集合 Γ , 使得若 $(a_1, \dots, a_n) \in \Gamma$ 且 $0 \leq b_i \leq a_i$, 则有 $(b_1, \dots, b_n) \in \Gamma$. 向量 (a_1, \dots, a_n) 的度 (*degree*) 定义为 $\sum a_i$.

球面上的 g -猜想. 一个向量 $(g_0, g_1, \dots, g_{\lfloor d/2 \rfloor})$ 是 \mathbb{S}^{d-1} 的一个三角剖分的 g -向量当且仅当存在一个多重复形 Γ , 使得 Γ 恰含有 g_i 个度为 i 的向量, 其中 $0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor$.

在 g -猜想中有一个关于向量 $(g_0, g_1, \dots, g_{\lfloor d/2 \rfloor})$ 的较复杂的数值刻画, 可参见Stanley [5]. 一类特殊且重要的球面三角剖分是单纯多面体 (*simplicial polytope*). 它们是真面 (proper face) 为单形 (从而它们的边界是一个三角剖分球面的几何实现) 的凸多面体 (convex polytope). 当 $d \geq 4$ 时, 已经知道存在非多面体 (即并非来自于单纯多面体) 的 \mathbb{S}^{d-1} 的三角剖分.

McMullen [3] 首先明确地表述了单纯多面体上的 g -猜想, 由于几乎没有什么证据, 这可谓是一个大胆的猜想. 他意识到这个猜想有可能在球面上也成立, 却不愿正式提出这个更一般的猜想. Stanley [4] 首先正式提出了球面上的 g -猜想, 他甚至认为 g -猜想还可以推广到比球面更一般的对象上, 于是提出了一个更一般的被称为Gorenstein* 复形上的 g -猜想的猜想. 单纯多面体上的 g -猜想的充分性被Billera和Lee [2] 所证明, 必要性被Stanley [4] 所证明. 可以证明, 若充分性在单纯多面体上成立, 则在球面上也成立, 因此只剩下必要性未被证明. 单纯多面体上的必要性证明使用了深刻的代

数几何中的工具；后来McMullen给出了一个更为初等的证明，但仍然是非常代数化的证明。

f -向量理论仍是代数组的一个非常活跃的研究领域。进一步的参考文献参见[1]和[5].

参考文献

- [1] M.M. Bayer and C.W. Lee, Combinatorial aspects of convex polytopes, In: Handbook of Convex Geometry, Vol. A, North-Holland, Amsterdam, 1993, pp. 485–534.
- [2] L.J. Billera and C.W. Lee, Sufficiency of McMullen's conditions for f -vectors of simplicial polytopes, Bull. Amer. Math. Soc. 2 (1980), 181–185.
- [3] P. McMullen, The numbers of faces of simplicial polytopes, Israel J. Math. 9 (1971), 559–570.
- [4] R.P. Stanley, The number of faces of a simplicial convex polytope, Adv. Math. 35 (1980), 236–238.
- [5] R.P. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra, 2nd Ed., Progress in Mathematics, Vol. 41, Birkhäuser, Boston, 1996.