**中文名称：自回避行走的计数问题**

**英文名称：Self-Avoiding Walks**

**撰写人：陈永川，Richard P. Stanley**

格点无规行走（lattice random walk）（波利亚行走，Pólya walk）的概念最早由波利亚（George Pólya）提出。这里的随机行走者在一个规则网格（通常被取作超立方格点）上游动。一个自回避行走（self-avoiding walk）是一个带限制条件的无规行走：即不允许任何格点被访问两次。无规行走和自回避行走具有许多内在的数学重要性，它们的研究涉及了数学、生物学、化学及物理学等领域。

$d$-维整数格点$\mathbb{Z}^d$ 上的一条$n$-长自回避行走$\omega$ 指一个有序集合$\omega = (\omega(0), \ldots, \omega(n))$, 其中$\omega(i) \in \mathbb{Z}^d$, $|\omega(i+1) - \omega(i)| = 1$ （欧几里德距离），且对于$i \neq j$，有$\omega(i) \neq \omega(j)$. 我们通常取$\omega(0) = (0, 0, \ldots, 0)$.

在$d$-维整数格点$\mathbb{Z}^d$ 上，$n$-长无规行走的个数是$(2d)^n$. 定义$c_d(n)$ 为$\mathbb{Z}^d$上$n$-长自回避行走的个数，按照惯例，我们定义$c_0 = 1$. 现在要考虑的一个基本问题就是$c_n$究竟有多大？它精确的表达式是什么？在一维情形中问题很简单，但是在二维及更高维情形这可能是一个相当困难的问题。

关于此问题的阐述可参见Madras和Slade的专著[4]. 对于小数值的$n$, $c_d(n)$ 的计算甚至都非常困难。对于方点阵（square lattice），Conway和Guttmann [1]计算出了直到51-长的自回避行走的个数；之后，Jensen又给出了$c_n$ 进一步的计数，他得到了当$52 \leq n \leq 71$ 时，$n$-长自回避行走的个数. 最近的一个突破是Hara和Slade [2]取得的，他们确定了维数$d > 4$时$c_d(n)$ 的渐近性质（asymptotic behavior）。

一个已知的结果是$\lim_{n\to\infty} [c_d(n)]^{1/n}$ 存在。这个极限叫做*自回避行走联结常数（self-avoiding walk connective constant）*，记为$\mu_d$.

目前关于$\mu_d$的估计，已知的最好的上下界是：

$$
\begin{aligned}
\mu_2 &\in [2.62002, 2.679192495]\\
\mu_3 &\in [4.572140, 4.7476]\\
\mu_4 &\in [6.742945, 6.8179]\\
\mu_5 &\in [8.828529, 8.8602]\\
\mu_6 &\in [10.874038, 10.8886].
\end{aligned}
$$

对于$d = 2$和3，存在一个正常数$\gamma$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_d(n)}{\mu_d^n n^{\gamma-1}}$$

存在且非零。以下是对于$d \geq 4$情形的猜想：对于$d > 4$，上述极限存在，其中临界指数（critical exponent）$\gamma = 1$. 对于$d = 4$，极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_d(n)}{\mu_d^n n^{\gamma-1}(\ln n)^{1/4}}$$

存在且有限。此外$d \leq 4$ 时，对临界指数$\gamma$ 的猜想如下：

$$\gamma = \begin{cases} 43/32 & d = 2, \\ 1.162... & d = 3, \\ 1 & d = 4. \end{cases}$$

另外一个基本问题涉及到二维自回避行走的标度极限（scaling limit）。大家普遍认为，它就是参数$\kappa$ 等于8/3 的Schramm-Loewner evolution (SLE). 更多细节可参见[3].

还有一个问题是计算所有$n$-长自回避行走的均方位移（mean square displacement），其定义是

$$s_d(n) \equiv \frac{1}{c_d(n)} \sum_{\omega} |\omega(n)|^2,$$

上式是对所有的$n$-长自回避行走$\omega$ 求和。

和$c_d(n)$的情况类似，下面是有关$s_d(n)$ 的极限存在的猜想:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_d(n)}{n^{2\nu}} & d \neq 4, \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_d(n)}{n^{2\nu}(\ln n)^{1/4}} & d = 4. \end{cases}$$

其中当$d > 4$ 时，临界常数$\nu = 1/2$. 此外，$d \leq 4$ 时，对临界指数$\nu$ 的猜想如下[4]:

$$\nu = \begin{cases} 3/4 & d = 2, \\ 0.59... & d = 3, \\ 1/2 & d = 4. \end{cases}$$

临界常数$\gamma$ 和$\nu$ 是格点无关的（lattice-independent），尽管它们依赖于维数（dimension-dependent）。从这个角度来讲它们被认为具有普适性（universality）。然而，迄今人们还不能给出存在性的证明，更不用说普适性的证明了。

# 参考文献


[1] A.R. Conway and A.J. Guttmann, Square lattice self-avoiding walks and corrections to scaling, Phys. Rev. Lett. 77 (1996), 5284–5287.

[2] T. Hara and G. Slade, The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions, Rev. Math. Phys. 4 (1992), 101–136.

[3] G. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, On the scaling limit of planar self-avoiding walk, Fractal Geometry and Applications: a Jubilee of Benoit Mandelbrot, Part 2, 339–364, Proc. Sympos. Pure Math. 72, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, arXiv:math.PR/0204277.

[4] N. Madras and G. Slade, The Self-avoiding Walk, Birkhäuser, Boston, 1993.